ESTIMATIVAS DE CHEBYSHEV E O POSTULADO DE BERTRAND

FERNANDO FERREIRA

Dado $n \in \mathbb{N}$, define-se $\pi(n)$ como sendo o número de primos que não excedem n. No final do século XIX, Jacques Hadamard e Charles de la Vallée-Poussin demonstraram um resultado célebre:

Teorema do número primo.

$$\lim_n \frac{\pi(n)\ln n}{n} = 1.$$

Também se escreve $\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$. Este teorema diz que, assintoticamente, $\pi(n)$ está próximo do número $\frac{n}{\ln n}$. Uma maneira equivalente de exprimir este facto é dizer que, para todos os números reais c e C com $c < 1 < C$, se tem

$$(\star) \qquad c\,\frac{n}{\ln n} < \pi(n) < C\,\frac{n}{\ln n}$$

para n suficientemente grande. O teorema é um resultado sobre a distribuição dos números primos e tem várias consequências interessantes. Uma delas é que (pelo menos a partir de certa ordem) há sempre números primos entre n e $2n$. Com efeito:

$$\pi(2n) - \pi(n) > c\,\frac{2n}{\ln 2n} - C\,\frac{n}{\ln n} \geq \frac{4c}{3}\frac{n}{\ln n} - C\,\frac{n}{\ln n} = \left(\frac{4c}{3} - C\right)\frac{n}{\ln n}.$$

A desigualdade do meio é justificada pelo facto de se ter $\frac{2}{\ln 2n} \geq \frac{4}{3\ln n}$ para $n \geq 4$, como o leitor pode facilmente confirmar. Se tomarmos constantes c e C com $c < 1 < C$ e $\frac{4c}{3} > C$, vem que $\pi(2n) - \pi(n) > 0$. Logo, há números primos entre n e $2n$.

A demonstração do teorema do número primo está para além do âmbito deste curso. A prova original usa métodos de análise complexa (que iremos aflorar em lições posteriores). Porém, já em meados do século XIX, o matemático Pafnuty Chebyshev obteve uma versão fraca do teorema do número primo. Chebyshev exibiu constantes $c < 1 < C$ que tornam a desigualdade $(\star)$ verdadeira. Os resultados de Chebyshev baseiam-se em métodos elementares e são suficientes para demonstrar o chamado postulado de Bertrand:

Postulado de Bertrand. *Para todo o número natural n diferente de 1, existe pelo menos um primo p tal que $n < p < 2n$.*

O postulado de Bertrand é realmente um teorema (demonstrado pela primeira vez por Chebyshev), mas esta é a forma tradicional de referir o resultado. No que se segue, vamos enunciar e justificar uma série de resultados auxiliares que nos vão permitir demonstrar este teorema.

Proposição 1. *Para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n}$.*

Demonstração. $4^n = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} = 2 + \sum_{k=1}^{2n-1}\binom{2n}{k} \leq 2 + (2n-1)\binom{2n}{n} \leq 2n\binom{2n}{n}$, onde se usa of facto de que $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$ e de que $2 \leq \binom{2n}{n}$. □

Lema 1. *Para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n+1}{n} \leq 4^n$.*

Demonstração. $\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{2}\left(\binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} = \frac{1}{2}2^{2n+1} = 2^{2n} = 4^n$. Note-se que $\binom{2n+1}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$. □

Lema 2. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{\substack{n+1<p\leq 2n+1 \\ p \text{ primo}}} p \;\Big|\; \binom{2n+1}{n}.$$

Demonstração. Basta ver que, para todo o número primo p com $n+1 < p \leq 2n+1$ se tem $p \,\big|\, \binom{2n+1}{n}$. Visto que $p \mid (2n+1)(2n)\cdots(n+2)$ e $n! \mid (2n+1)(2n)\cdots(n+2)$ (pois o produto de n números consecutivos é sempre múltiplo de $n!$) e visto que $n! \perp p$, sai $(p{\cdot}n!) \mid (2n{+}1)(2n)\cdots(n{+}2)$. O resultado agora é imediato. $\square$

Proposição 2. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ primo}}} p \;\leq 4^n.$$

Demonstração. Por indução em n. Os casos $n = 1, 2$ são verdadeiros. Se n não é primo então $\prod_{\substack{p\leq n \\ p \text{ primo}}} p = \prod_{\substack{p\leq n-1 \\ p \text{ primo}}} p \leq 4^{n-1} \leq 4^n$, onde a penúltima desigualdade é por hipótese de indução. Se n é primo, com $n > 2$, n é ímpar e portanto da forma $n = 2m+1$. Vem:

$$\prod_{\substack{p\leq n \\ p \text{ primo}}} p \;=\; \prod_{\substack{p\leq m+1 \\ p \text{ primo}}} p \;\cdot \prod_{\substack{m+1<p\leq 2m+1 \\ p \text{ primo}}} p \;\leq 4^{m+1}\binom{2m+1}{m} \leq 4^{m+1}\,4^m = 4^{2m+1} = 4^n.$$

A primeira desigualdade justifica-se por hipótese de indução (completa) e pelo Lema 2. A segunda desigualdade usa o Lema 1. $\square$

Proposição 3. *Seja* p *um número primo e suponhamos que* $p^r \mid \binom{n}{k}$, *onde* n, r *e* k *são inteiros positivos com* $k \leq n$. *Nestas condições, tem-se* $p^r \leq n$.

Demonstração. Seja l inteiro máximo tal que $p^l \mid m$ para certo m com $n-k+1 \leq m \leq n$. Considerem-se a e b os inteiros não negativos tais que $m+b = n$ e $m-a = n-k+1$. Vem $k = a+b+1$ e

$$\binom{n}{k} = \frac{(m+b)\cdots(m+1)\,m\,(m-1)\cdots(m-a)}{(a+b+1)!}.$$

Como $(a+b+1)! = (a+b+1)(a+b)\cdots(a+1)\,a!$ e visto que $b! \mid (a+b)\cdots(a+1)$, sabemos que existe um inteiro q tal que $(a+b+1)! = b!a!q$.

Logo

$$\binom{n}{k} = \frac{(m+b)\cdots(m+j)\cdots(m+1)\cdot(m-1)\cdots(m-i)\cdots(m-a)}{b \quad \cdots \quad j \quad \cdots \quad 1 \qquad\quad 1 \quad \cdots \quad i \quad \cdots \quad a} \cdot \frac{m}{q}.$$

Ou seja:

$$(b\cdots j\cdots 1)(1\cdots i\cdots a)q\binom{n}{k} = (m+b)\cdots(m+j)\cdots(m+1)\cdot(m-1)\cdots(m-i)\cdots(m-a)\cdot m$$

Dado que, por hipótese, $p^r \mid \binom{n}{k}$, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que

$$(b\cdots j\cdots 1)(1\cdots i\cdots a)qsp^r = (m+b)\cdots(m+j)\cdots(m+1)\cdot(m-1)\cdots(m-i)\cdots(m-a)\cdot m$$

Se uma potência do primo p divide algum $m+j$ $(1 \leq j \leq b)$, como essa potência também divide m (por definição de l e m), sai que essa potência divide j. De igual modo, se uma potência de p divide $m-i$ $(1 \leq i \leq a)$ então também divide i. Em suma, cada um dos fatores de p no produto $(m+b)\cdots(m+j)\cdots(m+1)\cdot(m-1)\cdots(m-i)\cdots(m-a)$ está correlacionado (de modo injetivo) com um fator do produto $b!a!$. Depois de cancelar todos estes fatores p, ficamos com $tqsp^r = vm$, para certos $t, v \in \mathbb{N}$ e $p \perp v$. Como $p^r \mid vm$, sai $p^r \mid m$. Vem $p^r \leq m \leq n$. $\square$

Estamos agora em condições de demonstrar o postulado de Bertrand. Dado n um número natural (supomos $n \geq 5$), considere-se o coeficiente binomial $\binom{2n}{n}$. Claramente, os seus fatores primos p são menores ou iguais a $2n$. Admitamos, com vista a um absurdo, que não existem primos entre n e $2n$. Assim, os fatores primos p de $\binom{2n}{n}$ dividem-se em três casos:

(1) $p \leq \sqrt{2n}$.
(2) $\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n$.
(3) $\frac{2}{3}n < p \leq n$.

Pela Proposição 3, se uma potência p^r dum primo p divide $\binom{2n}{n}$, então $p^r \leq 2n$. Note-se que, em particular, no segundo caso, vem $r \leq 1$. Ora, o terceiro caso não se dá, ou seja, não existem fatores primos p de $\binom{2n}{n}$ tais que $\frac{2}{3}n < p \leq n$. Com efeito, $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ e há exatamente dois desses fatores (ímpares) p no numerador, nomeadamente em p e $2p$ ($3p$ já excede $2n$), e dois desses fatores p no denominador (um em cada $n!$). Os fatores p do numerador e denominador cancelam e, portanto, $p \nmid \binom{2n}{n}$.

A fatorização de $\binom{2n}{n}$ em produto de primos é, pois, da forma:

$$\binom{2n}{n} = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}\, q_1 \cdots q_s,$$

os p_is e os q_js são diferentes dois a dois, cada p_i está no caso (1) e cada q_j está no caso (2). Vem, usando a Proposição 2 para justificar a última desigualdade:

$$\binom{2n}{n} = (p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k})(q_1 \cdots q_s) \leq (2n)^{\pi(\lfloor\sqrt{2n}\rfloor)} \prod_{\substack{q \leq \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor \\ q \ primo}} q \leq (2n)^{\sqrt{2n}}\, 4^{\frac{2}{3}n}.$$

Assim,

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}}\, 4^{\frac{2}{3}n},$$

pela Proposição 1. Sai facilmente $2^{2n} \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}}\, 2^{\frac{4}{3}n}$ e, portanto, $2^{\frac{2}{3}n} \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}}$. Passando a logaritmos fica-se com

$$\frac{2}{3} n \ln 2 \leq (1 + \sqrt{2n}) \ln(2n).$$

Esta desigualdade é verdadeira para $n = 467$ e falsa para $n = 468$. Dado que a curva definida pela função de variável real positiva $x \rightsquigarrow (1 + \sqrt{2x}) \ln(2x)$ é côncava (pois a segunda derivada desta função é negativa: é um exercício), a desigualdade acima é falsa para todos os valores inteiros n com $n \geq 468$. Em suma, a negação do postulado de Bertrand leva a absurdo para $n \geq 468$ e, portanto, o postulado é verdadeiro para estes valores. O postulado também vale para $n \leq 467$. Para ver isso basta considerar a seguinte sucessão de primos:

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631.$$

O postulado de Bertrand está assim demonstrado.